P_3 : APPLICATIONS DES BASES DE LA DYNAMIQUE

I. Mouvements rectilignes :

1. Solide glissant sur un plan incliné :

1.1. Enoncé :

Un solide de masse m glisse sans vitesse initiale sur un plan incliné non lisse d'un angle α sur l'horizontale. En supposant que le solide est animé d'un mouvement de translation et que les forces qui lui sont appliquées sont constantes.

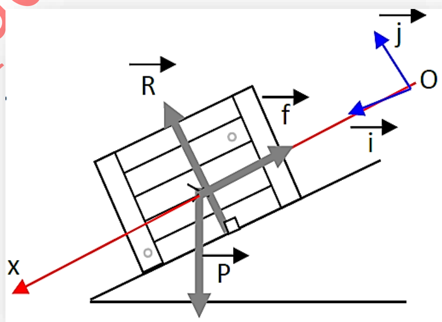
a. Établir l'expression de l'accélération :

- En appliquant le théorème du centre d'inertie.
- En appliquant le théorème de l'énergie cinétique.

b. Donner les équations horaires sachant qu'à $t = 0$; $x_0 = 0$.

1.2. Résolution :

a. Expression de l'accélération :



- Par application du T.C.I :

  Système : solide

  Référentiel : Terrestre supposé galiléen

  B.F.A : $\vec{P}$; $\vec{R}$ et $\vec{f}$

  T.C.I : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$

  Suivant x : $P\sin(\alpha) + 0 - f = ma \Rightarrow a = g\sin(\alpha) - \frac{f}{m}$

- Par application T.E.C entre t_0 et t : $E_C(t) - E_C(t_0) = W(\vec{P}) + W(\vec{T}) + W(\vec{f}) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgx\sin(\alpha) - fx \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{x}^2\right) = \frac{d}{dt}(mgx\sin(\alpha)) + \frac{d}{dt}(-fx) \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} \Rightarrow m\dot{x}\ddot{x} = mg\dot{x}\sin(\alpha) - f\dot{x} \Rightarrow a = mg\sin(\alpha) - \frac{f}{m}$

b. Equations horaires :

On a : $a = mg\sin(\alpha) - \frac{f}{m} = cste \Rightarrow v = \left(mg\sin(\alpha) - \frac{f}{m}\right)t + C_1$ or à $t = 0, v_0 = 0 \Rightarrow 0 = \left(mg\sin(\alpha) - \frac{f}{m}\right)t + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow v = \left(mg\sin(\alpha) - \frac{f}{m}\right)t \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(mg\sin(\alpha) - \frac{f}{m}\right)t^2 + C_2$ or à $t = 0$ $x_0 = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}\left(mg\sin(\alpha) - \frac{f}{m}\right)0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(mg\sin(\alpha) - \frac{f}{m}\right)t^2$

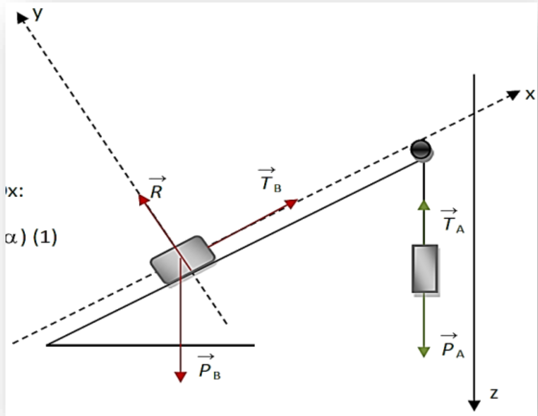
Remarque : si les forces de frottements sont nulles on remarque que $a = mg\sin(\alpha)$

2. Systèmes articulés :

1.1. Enoncé :

Un corps A de masse $m_A = 70$ g entraine dans sa chute un corps B de masse $m_B = 80$ g qui glisse sur un plan incliné d'un angle $\alpha = 30°$. A et B sont reliés par l'intermédiaire d'un fil inextensible qui passe par la gorge d'une poulie dont on néglige la masse. Calculer en négligeant tous les frottements, l'accélération et la tension du fil ($g = 10\ m/s^2$)

1.2. Résolution :



Système : masse A

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

B.F.A : $\vec{P}_A$ et $\vec{T}_A$

T.C.I : $\vec{P}_A + \vec{T}_A = m_A\vec{a}$

Suivant z : $P_A - T_A = m_A a \Rightarrow T_A = m_A(g - a)$ (1)

Système : masse B

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

B.F.A : $\vec{P}_B$; $\vec{T}_B$ et R

T.C.I : $\vec{P}_B + \vec{T}_B + \vec{R} = m_B\vec{a}$

Suivant x : $-P\sin(\alpha) + T_B = m_B a \Rightarrow T_B = m_B\big(a + g\sin(\alpha)\big)$ (2)

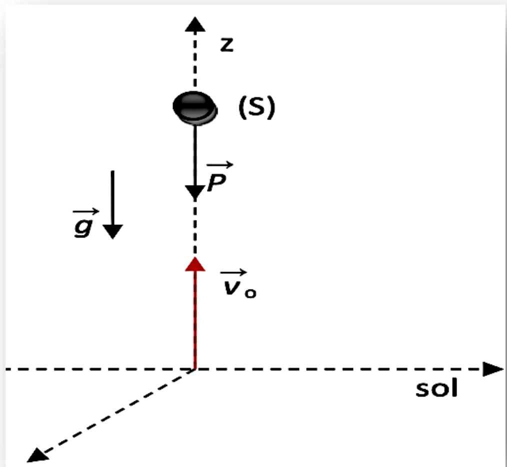
La tension du fil est partout la même : $T_A = T_B \Rightarrow m_A(g - a) = m_B\big(a + g\sin(\alpha)\big)$

$$\Rightarrow a = \frac{g(m_A - m_B\sin\alpha)}{m_A + m_B} = 2\ m.s^{-2}$$

La tension des fils est : $T_A = T_B = m_A(g - a) = 0{,}56$ N

3. Mouvement d'une particule dans le champ de pesanteur : cas ou $\vec{g}//\vec{v_0}$:

1.1. Étude dynamique :



Un projectile de masse m est lancé à partir d'un point O verticalement vers le haut avec une vitesse $\vec{v_0}$ à l'instant de date t = 0.

Système : projectile

Référentiel : terrestre supposé galiléen

B.F.A : $\vec{P} = m\vec{g}$

T.C.I : $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

En projetant dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$

Par définition : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, par intégration : $\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 = v_{0x} \\ v_y = C_2 = v_{0y} \\ v_z = -gt + C_3 = -gt + v_{0z} \end{cases}$ or $\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \end{cases}$

Donc : $\vec{v}\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0 \end{cases}$

Par définition : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, par intégration : $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = C_4 = x_0 \\ y = C_5 = y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_5 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 \end{cases}$ or

$\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$ Donc : $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t \end{cases}$

Remarque : si v_0 est initialement dirigé vers le haut, le mouvement est d'abord rectiligne uniformément décéléré. Au point le plus élevé v = 0, ensuite le mouvement est rectiligne uniformément accéléré vers le bas.

1.2. Application 1 :

Un gymnaste quitte la surface élastique d'un trampoline avec une vitesse verticale de 30 km/h. Son centre d'inertie est à 2 m du sol. Le gymnaste est assimilé à un solide. On suppose que la chute est libre.

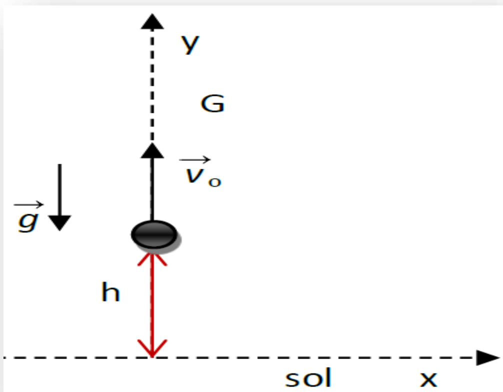
a. Établir les équations horaires dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b. En déduire la durée de la montée

c. Déterminer la hauteur maximale atteinte par le centre d'inertie du sauteur.

1.3. Résolution :

a. Déterminons les équations horaires :



Système : gymnaste

Référentiel : Terrestre supposé galiléen

B.F.A : $\vec{P}$

T.C.I : $\vec{P} = m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Dans le repère (OX, OY) : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$

On a $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, par intégration

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 = v_{ox} \\ v_y = -gt + C_2 = -gt + v_{0y} \end{cases} \text{or } \vec{v}_0\begin{cases} v_{0x} = 0 \\ v_{0y} = v_0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = -gt + v_0 \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}, \text{par intégration}, \overrightarrow{OG}\begin{cases} x = C_3 = x_0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + C_4 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0 \end{cases} \text{or } \overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h \end{cases}$$

b. Durée de la montée :

Au sommet de la trajectoire $v_y = 0 \Rightarrow -gt_S + v_0 \Rightarrow t_S = \frac{v_0}{g} = 0{,}85\ s$

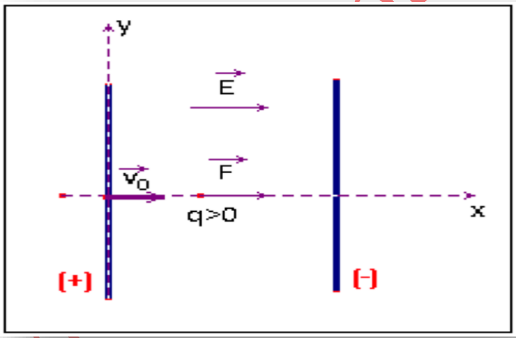
c. Altitude maximale :

En remplaçant t_S dans y(t) on a : $y_S = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) + h \Rightarrow y_S = \frac{v_0^2}{2g} + h = 5{,}5\ m$

2. Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$: cas où : $\vec{E} // \vec{v_0}$

Système : particule

Référentiel : Terrestre supposé galiléen



B.F.A : $\vec{F} = q\vec{E}$

T.C.I : $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

Projection on : $\vec{E}\begin{cases} E \\ 0 \end{cases}$, On en déduit : $\vec{a}\begin{cases} a_x = \frac{Qe}{m} \\ a_y = 0 \end{cases}$

Par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, par intégration :

$\vec{v}\begin{cases} v_x = \frac{qE}{m}t + C_1 = \frac{qE}{m}t + v_{0x} \\ v_y = C_2 = v_{0y} \end{cases}$ or $\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = \frac{qE}{m}t + v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases}$

Par définition $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, par intégration : $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0 t + C_3 \\ y = C_4 \end{cases}$ or $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = \frac{qE}{2m}t^2 + v_0 t \\ y = 0 \end{cases}$$

La particule décrit donc un mouvement rectiligne accéléré.

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique on a : $\frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = qU \Rightarrow v_S^2 - v_0^2 = \frac{2qU}{m} \Rightarrow$

$$v_S^2 = v_0^2 + \frac{2qU}{m} \Rightarrow v_S = \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU}{m}}$$

La particule n'est déviée, son mouvement est accéléré si $q > 0$ et décéléré si $q < 0$.

3. Mouvement d'une bille dans un fluide :

Abandonnons, à vitesse nulle, une bille dans un fluide.

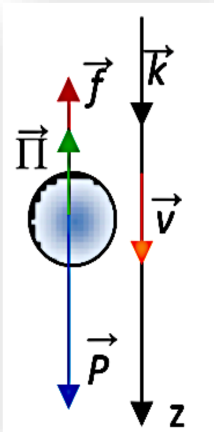
3.1. Bilan des forces :

- Le poids : $\vec{P} = m.\vec{g}$ de la bille (il est vertical et dirigé vers le bas)

- Les forces de frottements du fluide : pour des objets petits, dont la vitesse par rapport au fluide est faible, on parle d'écoulement laminaire du fluide autour de l'objet et de force de frottement laminaire (absence de turbulence). La valeur de la force de frottement est proportionnelle à la valeur de la vitesse de l'objet : $\vec{f} = -h\vec{v} = -6\pi\eta r\vec{v}$; avec h : coefficient de frottement du fluide (kg/s) qui dépend à priori de la viscosité du fluide et de ses dimensions et $\vec{v}$: vitesse de l'objet.
- La poussée d'Archimède : elle correspond à l'ensemble des forces de pression exercées par le fluide sur l'objet qui y est immergé. On peut énoncer le principe d'Archimède : tout corps plongé dans un liquide subit de la part de celui-ci une force opposée au poids du liquide déplacé par ce corps. On notera $\vec{\pi}$ ou $\vec{F_A}$ la poussée d'Archimède, son expression est : $\vec{\pi} = -\rho_{fluuide}.V_{déplacé}.\vec{g} = -m'\vec{g}$; avec la masse volumique du fluide (kg/m^3) et $V_{déplacé}$ le volume de partie de l'objet immergé dans le liquide.

  Remarque : La poussée d'Archimède existe dans tout fluide. Par conséquent, elle existe également dans l'air (souvent négligeable).

3.2. Équation différentielle du mouvement de la chute de la bille :



En appliquant la deuxième loi de Newton dans un référentiel terrestre supposé galiléen on a : $\vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} - m'\vec{g} - 6\pi\eta r\vec{v} = m\vec{a}$

En projetant suivant z on a : $mg - m'g - 6\pi\eta rv = ma \Rightarrow m\frac{dv}{dt} + 6\pi\eta rv = (m - m')g \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{m}v = \left(1 - \frac{m'}{m}\right)g$

En posant : $h = 6\pi\eta r$ et $1 - \frac{m'}{m} = \alpha$ on a : $\frac{dv}{dt} + \frac{h}{m}v = \alpha g$ (1)

Cette équation peut se mette sous la forme $\frac{dv}{dt} = -\frac{h}{m}v + \alpha g$

En s'identifie à $y' = ay + b$, la solution est de la forme : $y = Ke^{-ax} - \frac{b}{a}$

En appliquant cette propriété à notre équation différentielle (1) on a : $v = Ke^{-at} - \frac{b}{a}$

Avec $a = -\frac{h}{m} = -\frac{1}{\tau}$ et $b = \alpha g$

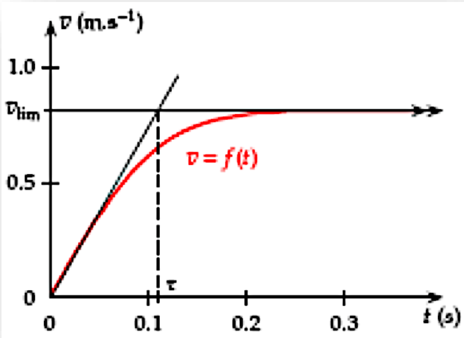
Donc $v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\alpha g}{-\frac{h}{m}} = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\alpha mg}{h}$

A t = 0, v = 0 : $0 = K + \frac{\alpha mg}{h} \Rightarrow K = -\frac{\alpha mg}{h}$

Ainsi $v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\alpha mg}{h} = -\frac{\alpha mg}{h}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\alpha mg}{h} \Rightarrow v(t) = \frac{\alpha mg}{h}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

3.3. Vitesse limite :

Lorsque la vitesse limite est atteinte, l'accélération est nulle et la vitesse est constante.



Ainsi $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{h}{m} v_{lim} = \alpha g \Rightarrow v_{lim} = \frac{\alpha m g}{h}$

La solution peut s'écrire alors : $v(t) = v_{lim}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

3.4. Durée du régime initial (avant le régime permanent) :

On définit le temps caractéristique τ associé à une chute verticale comme étant la date qui correspond, pour la courbe v = f(t), au point d'intersection de la tangente à l'origine (v = 0) et à l'asymptote (v_{lim})

On lâche l'objet sans vitesse, soit v = 0 à t = 0, l'équation différentielle (1) donne : $\frac{dv}{dt} = \alpha g$.

Cela signifie que l'équation de la tangente à l'origine est w(t) = αgt. La droite tangente à l'origine prend la valeur v_{lim} pour $t = \frac{m}{h}$. Cette durée représente le temps caractéristique de la chute : $\tau = \frac{m}{h}$, la durée du régime initial est voisine de τ.

3.5. Application 2 :

On étudie le mouvement d'une bille B en plomb de rayon r, de masse m, tombant sans vitesse initiale dans un réservoir de grandes dimensions rempli d'éthanol liquide de masse volumique ρ_e. Sur la bille en mouvement s'exercent :

- Son poids,
- La résistance du fluide, qui est une force colinéaire et de sens opposé au vecteur vitesse instantanée de la bille, d'intensité f = 6πηrv, expression où η est la viscosité de l'éthanol supposée constante, v la valeur de la vitesse instantanée de la bille et r son rayon.
- La poussée d'Archimède qui est une force verticale orientée vers le haut, d'intensité $F = \rho_e V g$, relation où ρ_e est la masse volumique de l'éthanol, V le volume de la bille et g l'intensité de la pesanteur.

On donne : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$; $\rho_e = 0{,}789\ g/cm^3$; $\rho_{Pb} = 11{,}35\ g/cm^3$; rayon de la bille r = 0,5 mm ; Volume de la bille $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

a. Représenter sur un schéma les forces appliquées à la bille a un instant ou sa vitesse est $\vec{v}$.

b. Montrer, par application de la deuxième loi de Newton, que l'équation différentielle du mouvement de la bille s'écrit **:** $\frac{dv}{dt} + \alpha v = \frac{1}{\tau}$; où a et t sont des constantes.

c. Donner l'expression de a en fonction de ρ_{Pb}, r et η (viscosité de l'éthanol) puis exprimer t en fonction de g, ρ_e et ρ_{Pb}. Vérifier que t = 0,11 $s^2.m^{-1}$.

d. Montrer l'existence d'une vitesse limite. Préciser son expression en fonction de a et t.

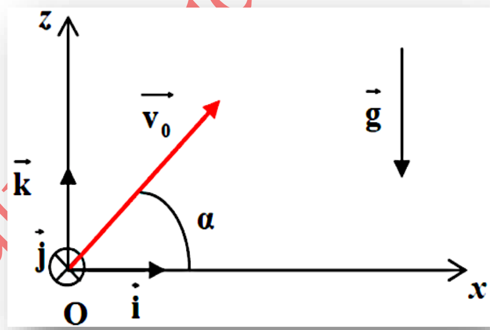
e. On trouve expérimentalement que V_{lim} = 4,77 m/s. Quelle valeur de a peut-on en déduire ? Déterminer alors la valeur de la viscosité η de l'éthanol.

II. Mouvements paraboliques :

1. Mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur : cas ou $\vec{g} \not\parallel \vec{v_0}$:

Un projectile, de masse m est lancé dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ avec une vitesse initiale de lancement $\vec{v_0}$. Ce vecteur fait avec l'horizontale un angle aigu α appelé angle de tir.

2.1. Étude dynamique :



Système : projectile

Référentiel : terrestre supposé galiléen

B.F.A : $\vec{P}$

T.C.I : $\vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

Par projection dans re repère choisi on a : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$

Par définition : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; par intégration : $\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 = v_{0x} \\ v_y = C_2 = v_{0y} \\ v_z = -gt + C_3 = -gt + v_{0z} \end{cases}$ or $\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0\sin\alpha \end{cases}$

Donc : $\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\cos\alpha \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$

Par définition : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, par intégration :

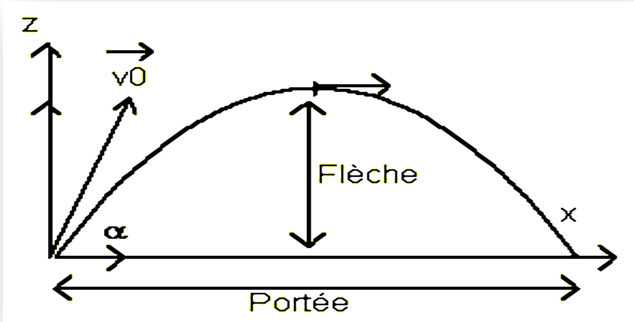
$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0\cos\alpha.t + C_4 = v_0\cos\alpha.t + x_0 \\ y = C_5 = y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha.t + C_5 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha.t + z_0 \end{cases}$ or $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0\cos\alpha.t \\ y = C_5 = y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha.t \end{cases}$

Remarque :

y = 0, le mouvement est plan et s'effectue dans le plan XOZ. La projection du mouvement sur l'axe Ox un mouvement uniforme alors que la projection du mouvement sur l'axe Oy est un mouvement uniformément varié.

2.2. Équation de la trajectoire :



$$x = v_0 \cos\alpha . t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha . \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)$$

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}\right) + \tan\alpha . x$$

$$z(x) = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} . x^2 + \tan\alpha . x$$

La trajectoire du projectile est donc parabolique.

2.3. Portée horizontale :

La portée est l'abscisse d'un point P d'ordonnée z = 0 (si z = 0, P est le point d'impact).

Pour déterminer x_P, on résout z(x) = 0.

$$-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} . x_P{}^2 + \tan\alpha . x_P = 0 \Rightarrow x_P \left(-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} . x_P + \tan\alpha\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} . x_P + \tan\alpha = 0 \Rightarrow x_P = \frac{2 v_0^2 \cos^2\alpha . \tan\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha . \sin\alpha}{g}$$

En remarquant que : $2\cos\alpha . \sin\alpha = \sin(2\alpha)$; on a : $x_P = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$

Cette portée est maximale si $\sin(2\alpha) = 1$, ce qui correspond à un angle $\alpha = 45°$: $x_{Pmax} = \frac{v_0^2}{g}$

N.B :

Dans le cas où l'altitude initiale est non nulle on résout le trinôme de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ pour déterminer la portée de tir.

2.4. La flèche :

La flèche est la hauteur maximale atteinte par le projectile.

Au sommet S de la trajectoire la composante verticale de la vitesse est nulle : $v_z = 0$.

$v_z = 0 \Rightarrow -g t_F + v_0 \sin\alpha = 0 \Rightarrow t_F = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$: temps mis par le projectile pour atteindre le sommet de la trajectoire

En remplaçant dans l'équation horaire de y(t) on a : $z_F = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) =$

$-\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} \Rightarrow z_F = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$

En remplaçant dans l'équation horaire de x(t) on a :

$$x_F = v_0 \cos\alpha . \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin\alpha . \cos\alpha}{g} \Rightarrow x_F = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

2.5. Application 3 :

Lors d'un match de volleyball, un joueur frappe la balle de m = 280 g, et lui communique une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ à partir d'un point C situé à h = 2,0 m du sol et à une distance d_1 = 3 m du filet. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ est incliné d'un angle $\alpha = 45^0$ sur l'horizontale et sa norme vaut v_0 = 7,9 m/s.

On prendra l'accélération de la pesanteur g = 10 m.s^{-2}.

<u>Etude du mouvement de la balle :</u> La balle frappée à la date t = o, décrit sa trajectoire dans le plan vertical contenant le vecteur $\overrightarrow{v_0}$ et rapporté au repère (Ox ; Oy) orthonormé supposé galiléen. On néglige les forces de frottement de l'air sur la balle.

a. Trouver l'accélération $\vec{a}$ de la balle ; donner ses coordonnées cartésiennes.

b. Exprimer à l'instant t, les coordonnées cartésiennes du vecteur vitesse $\vec{v}$ de la balle.

c. Déterminer les équations paramétriques du mouvement de la balle. En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire.

d. Montrer que la balle passe au-dessus du filet, haut de H = 2,43 m.

e. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle au-dessus du sol.

f. Déterminer les caractéristiques du vecteur vitesse de la balle lorsqu'elle touche le sol.

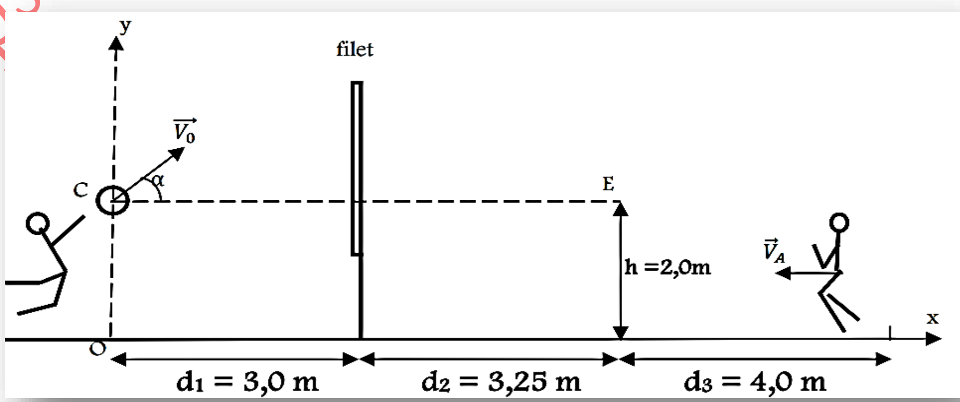
<u>Interception de la balle :</u> Pour intercepter la balle, au point E situé à d_2 = 3,25 m du filet et à 2,0 m au-dessus du sol, un adversaire part de derrière à une distance d_3 = 4,0 m de la verticale de E, à l'instant où la balle passe au-dessus du filet. On suppose qu'il suit une ligne droite parallèle à (Ox), avec une vitesse $\overrightarrow{v_A}$ constante.

g. Vérifier que la balle passe par le point E.

h. Exprimer la date t_1 à laquelle la balle passe au-dessus du filet en fonction de d_1, v_0 et α.

i. Exprimer la date t_2 à laquelle la balle passe au point E en fonction de d_1, d_2, v_0 et α.

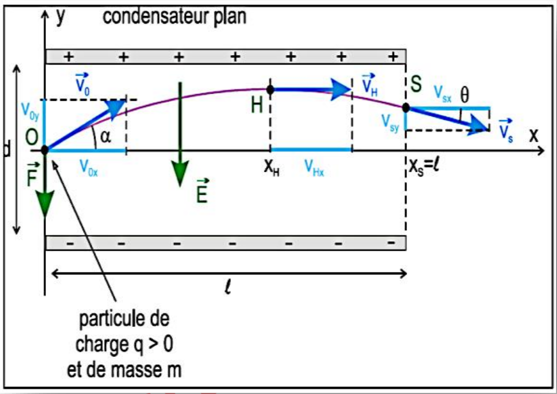
j. Montrer que la vitesse v_A de cet adversaire pour intercepter la balle est donnée par la relation : $v_A = \frac{d_3 . v_0 . \cos(\alpha)}{d_2}$. Calculer v_A.



1. Mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{E}$ uniforme :

1.1. Cas ou $\vec{v_0} \nparallel \vec{E}$:

A l'instant initial, une particule de masse m et charge électrique $q > 0$ pénètre avec une vitesse $\vec{v_0}$ dans l'espace compris entre les armatures d'un condensateur plan, auxquelles on a appliqué une tension $U > 0$. Entre ces plaques s'établit un champ électrique uniforme $\vec{E}$ (voir schéma).



Système : particule

Référentiel : terrestre supposé galiléen

B.F.A : $\vec{F_e} = q.\vec{E}$

T.C.I : $\vec{F_e} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

Par projection : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{qE}{m} \end{cases}$

Par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; par intégration : $\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 = v_{0x} \\ v_y = -\frac{qE}{m}t + C_2 = -\frac{qE}{m} + v_{0y} \end{cases}$

Or $\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_{0y} = v_0\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0\sin\alpha \\ v_{0y} = -\frac{qE}{m}t + v_0\cos\alpha \end{cases}$

On a : $\vec{v} = \frac{d\vec{OG}}{dt}$, par intégration : $\vec{OG}\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t + C_4 = (v_0\cos\alpha)t + x_0 \\ y = -\frac{qE}{2m}t^2 + v_0\cos\alpha.t + C_3 = -\frac{qE}{2m}t^2 + v_0\sin\alpha.t + y_0 \end{cases}$

Or $\vec{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{OG}\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha)t \\ y = -\frac{qE}{2m}t^2 + v_0\sin\alpha.t \end{cases}$

Equation de la trajectoire : $x = (v_0\cos\alpha)t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow y(x) = -\frac{qE}{2m}\left(\frac{x}{v_0\cos\alpha}\right)^2 + v_0\sin\alpha.\frac{x}{v_0\cos\alpha}$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{qE}{2mv_0^2\cos^2(\alpha)}x^2 + (\tan\alpha)x$, cette trajectoire est parabolique.

1.1.1. Les coordonnées du point S : $x_S = \ell \Rightarrow y_S = -\frac{qE}{2mv_0^2\cos^2(\alpha)}\ell^2 + (\tan\alpha)\ell$

1.1.2. Durée du mouvement : $(v_0\cos\alpha)t_S = \ell \Rightarrow t_S = \frac{\ell}{v_0\cos\alpha}$

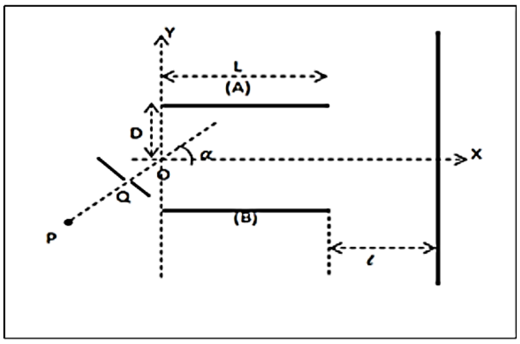
1.1.3. Les cordonnées de la vitesse au point S : $\vec{v_S}\begin{cases} v_{sx} = v_0\cos\alpha \\ v_{sy} = -\frac{qE}{m}\frac{\ell}{v_0\cos\alpha} + v_0\cos\alpha \end{cases}$

1.1.4. La direction de $\vec{v_S}$ par rapport à l'axe Ox : $\tan\theta = \frac{v_{sy}}{v_{sx}}$

1.1.5. La flèche : au point le plus haut : $v_y = 0 \Rightarrow -\frac{qE}{m}t_H + v_0 \cos\alpha = 0 \Rightarrow t_H = \frac{mv_0 \cos(\alpha)}{qE}$: durée mise par le projectile pour arriver au sommet.

L'altitude correspondante est : $y_H = y = -\frac{qE}{2m}{t_H}^2 + v_0 \sin\alpha . t_H$

1.2. Application 4 :



Un faisceau homocinétique de particules alpha (He^{2+}), émis en P avec une vitesse négligeable, est accéléré entre les points P et Q situés dans le plan (Oxy), par une tension $U_1 = U_{PQ}$. Il pénètre en O avec une vitesse $v_0 = v_Q$, dans le champ électrique $\vec{E}$ créé par une tension $U = U_{AB}$ positive appliquée entre les plaques horizontales (A) et (B) d'un condensateur.

Le vecteur vitesse $\vec{v_0}$ fait un angle $\alpha = 30°$ avec l'axe (Ox).

On ne tiendra compte que de la force électrostatique. La zone entre les armatures est délimitée par les inéquations $0 < x < L$; $-D < y < D$.

Les particules alpha sortent ensuite de cette zone pour $x = L$ et finissent sur un écran fluorescent situé à une distance l des armatures.

Accélération de la particule He^{2+} :

a. Quel est le signe de le tension accélératrice $U_1 = U_{PQ}$?

b. Donner les caractéristiques de la force électrique $\vec{F_1}$ qui s'exerce sur un ion He^{2+} entre les points P et Q.

Etude du mouvement d'une particule alpha dans un champ $\vec{E}$:

c. Déterminer les équations horaires du mouvement de la particule en fonction de sa masse m, de la charge élémentaire, D, v_0, U, α et t.

d. Montrer que le mouvement est plan et préciser ce plan.

e. Etablir l'équation cartésienne de la trajectoire entre les armatures et préciser sa nature.

f. Entre quelles valeurs doit se situer la tension U pour que la particule puisse sortir du champ $\vec{E}$ sans heurter les armatures.

Etude énergétique :

g. Rappeler la formule du travail $W(\vec{F})$ de la force électrique $\vec{F}$ sur un trajet menant d'un point M à un point N d'une région ou règne un champ électrostatique uniforme.

h. Trouver l’expression de l’énergie cinétique de la particule alpha en un point d’ordonnée y en fonction de U, m, v_0, e, D et y.

i. En déduire la vitesse de la particule au point d’ordonnée $y = y_{max}$.

Déviation des particules vers l’écran :

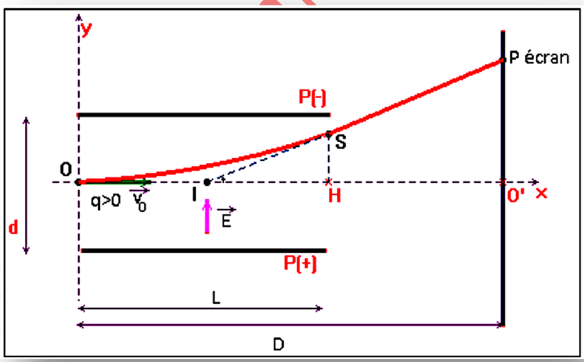
j. Déterminer les coordonnées du vecteur-vitesse $\vec{v}$ avec lequel la particule quitte la zone entre les armatures en fonction de m, e, L, U, v_0, D et α.

k. Quelle est la nature du mouvement de la particule une fois sortie des armatures ? justifier.

l. Déterminer les coordonnées du point d’impact P de la particule sur l’écran.

<u>Données</u> : $U = 10^3$ V ; $e = 1{,}6.10^{-19}$ C ; $v_0 = 3{,}5.10^5$ m/s ; D = 3,5 cm ; L = 10 cm ; m = 4u ; 1u = $1{,}67.10^{-27}$ Kg

1.3. <u>Cas ou $\vec{v_0} \perp \vec{E}$:</u>



Considérons une particule chargée q > 0 en mouvement dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme vertical dirigé vers le haut.

<u>Système :</u> particule

<u>Référentiel :</u> terrestre supposé galiléen

<u>B.F.A :</u> $\vec{F_e} = m\vec{a}$

<u>T.C.I :</u> $\vec{F_e} = m\vec{a} \Rightarrow q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$

En projetant on a : $\vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \frac{qE}{m} \end{cases}$

Par définition $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, par intégration: $\vec{v}\begin{cases} v_x = C_1 = v_{0x} \\ v_y = \frac{qE}{m}t + C_2 = -\frac{qE}{m} + v_{0y} \end{cases}$

Or $\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_{0y} = \frac{qE}{m}t \end{cases}$

Par définition $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, par intégration : $\overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 t + C_4 = v_0 t + x_0 \\ y = \frac{qE}{2m}t^2 + C_3 = \frac{qE}{2m}t^2 + y_0 \end{cases}$

Or $\overrightarrow{OG_0}\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OG}\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$

L’équation de la trajectoire est : $x = v_0 t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0} \Rightarrow y(x) = \frac{qE}{2mv_0^2}x^2$

1.3.1. <u>Condition pour que la particule émerge du champ :</u>

On a : $x = \ell$ et $y < \frac{d}{2} \Rightarrow y(\ell) < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{qE}{2mv_0^2}\ell^2 < \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{qU\ell^2}{2mdv_0^2} < d \Rightarrow U < \frac{md^2v_2^2}{q\ell^2}$

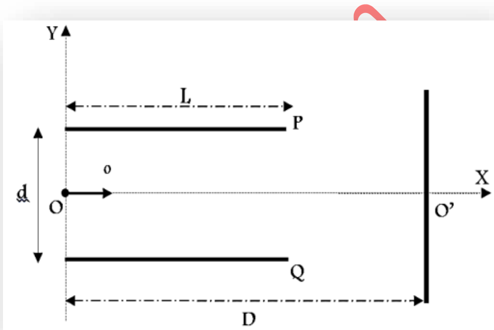
1.3.2. <u>Détermination de la déviation verticale :</u>

Quand la particule sort des plaques, elle n'est soumise à aucune d'après le principe d'inertie elle est animée d'un mouvement rectiligne uniforme et heurte l'écran en un point P : $\tan\alpha = \frac{HS}{HI} = \frac{O'P}{O'I} \Rightarrow \overline{O'P} = \frac{HS.O'I}{HI} = \frac{\frac{qE}{2mv_0^2}\ell^2\left(D-\frac{L}{2}\right)}{\frac{\ell}{2}} \Rightarrow \overline{O'P} = \frac{qE}{mv_0^2}\ell\left(D-\frac{L}{2}\right)$

On peut en déduire de cette expression la charge massique : $\frac{q}{m} = \frac{\overline{O'P}.v_0^2}{E\ell\left(D-\frac{L}{2}\right)}$

1.4. Application 5 :

Pour déterminer la charge massique d'une particule, on utilise un dispositif de déflexion électrique constitué de deux plaques conductrices A et B planes, horizontales, parallèles, de longueur L, distantes de d. Des ions X^{3+} de masse m pénètrent avec une vitesse $_0$ horizontale par le point O ; dans l'espace compris entre deux armatures P et Q où règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = -E.\vec{j}$ créé par la tension U_{PQ}.



a. Identifier la plaque qui porte le potentiel le moins élevé. En déduire le signe de la tension $U_{PQ} = U_1$.

b. Le mouvement est rapporté au repère (Ox, Oy). Déterminer les équations horaires du mouvement d'un ion X^{3+}dans ce champ électrique uniforme. En déduire l'équation de la trajectoire.

c. Exprimer l'ordonnée du point de sortie S d'un ion X^{3+}du champ électrique uniforme en fonction de m, V_0, U_1, L, d et q.

d. Etablir l'expression de la tension U_1maximale en fonction de m, V_0, q, d et L pour que la particule X^{3+} puisse sortir du champ sans heurter les plaques ?

A sa sortie du champ électrique, la particule arrive en un point P d'un écran placé perpendiculairement à l'axe Ox, à la distance D de l'axe des ordonnées (yy'). Soit O', le point d'intersection de l'axe Ox avec l'écran. On admet que la tangente à la trajectoire au point de sortie S dans l'espace compris entre les deux armatures P et Q passe par le point I, milieu de la longueur L.

e. Quelle est la nature du mouvement de la particule X^{3+} à la sortie des plaques ? Justifier

f. Exprimer la déviation Y = O'P de la particule en fonction de m, q, U_1, d, L, D et V_0.

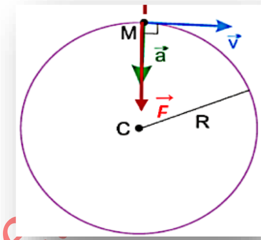
g. Etablir l'expression de la charge massique $\frac{q}{m}$ de la particule en fonction de Y, L, D, d, U_1 et V_0.

h. Calculer le rapport $\frac{q}{m}$ et identifier la particule. Données : L = 4 cm ; d = 2 cm ; D = 20cm ; $V_0 = 4.10^5$ $m.s^{-1}$; U = 1000V ; Y= O'P = 6,5 cm.

Particule	Fe^{3+}	Al^{3+}	B^{3+}
Charge massique (10^7 $C.kg^{-1}$)	0,51	1,06	2,89

III. Mouvement circulaire uniforme :

1. Étude dynamique :



Considérons un mobile M qui décrit un mouvement circulaire uniforme dans un référentiel galiléen.

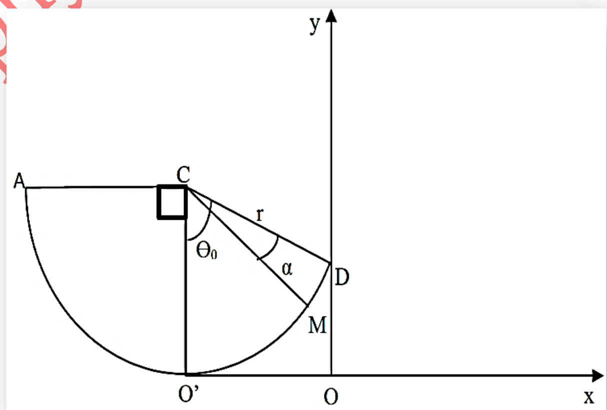
Système : mobile M

Référentiel : terrestre supposé galiléen

T.C.I : $\vec{F} = \sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m(\vec{a_T} + \vec{a_N}) = m\left(\frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}\right) = m\frac{dv}{dt}\vec{T} + m\frac{v^2}{R}\vec{N}$

Le mouvement est uniforme donc : $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{F} = m\frac{v^2}{R}\vec{N}$ or $v = rw \Rightarrow \vec{F} = mRw^2\vec{N}$

2. Application 6 :



Soit une piste circulaire AO'D, continue dans un paln vertical, de rayon r = 0,4 m. L'angle $(\overrightarrow{CO'}, \overrightarrow{CD}) = \theta_0 = 60°$. CO' est l'orthogonal au plan horizontal contenant O' et O.

On abondonne sans vitesse initiale une bille assimilable à un point matériel de masse m = 0,2 kg en A. On néglige toute force sur AO'D. on prendra g = 10 m/s². Un système de guidage permet de maintnir la bille en contact permanent avec la piste.

a. Déterminer la valeur de la vitesse de la bille en O'.

b. Déterminer l'intensité de la réaction de la piste en O'.

c. Déterminer les carctéristiques de sa vitesse en D.

En admettant que la bille quitte au point D avce une vitesse est de 2 m/s.

d. Etablir les équations horaires du mouvement ultérieur de la bille dans le repère (Oxy).

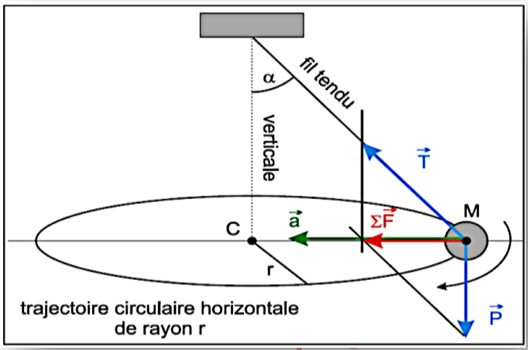
e. En déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire dans le même repère.

f. Exprimer la hauteur maximale par rapport au sol contenant l'axe (Ox) atteinte par la bille en fonction de v_D, θ, g et r. Calculer sa valeur.

g. Calculer la distance O'P avec P le point de chute de la bille sur l'axe (Ox).

3. Pendule conique :

Si on fait tourner lentement un moteur fixé à l'extrémité supérieure du pendule, on observe que pour une certaine valeur de la vitesse angulaire w, le pendule s'écarte de la tige et la sphère décrit un cercle horizontal. L'angle α que fait le fil du pendule avec la verticale dépend de w.



Système : pendule

Référentiel : terrestre supposé galiléen

B.F.A : $\vec{P}$ et $\vec{T}$

T.C.I : $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$

Dans le repère (O, X, Y) : $\begin{cases} 0 + T\sin\alpha = ma \\ -P + T\cos\alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T\sin\alpha = ma \\ T\cos\alpha = mg \end{cases} \Rightarrow \frac{T\sin\alpha}{T\cos\alpha} = \frac{ma}{mg} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{a}{g} = \frac{rw^2}{g}$

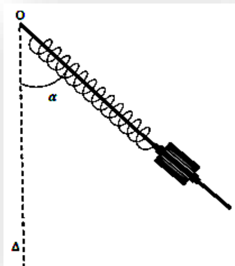
Or $r = \ell\sin\alpha \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\ell\sin\alpha w^2}{g} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{g}{\ell w^2}$

On sait que $\cos\alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{g}{\ell w^2} \leq 1 \Rightarrow w \geq \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

La vitesse angulaire limite que w doit dépasser pour que le pendule s'écarte de sa position initiale : $w_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

4. Application 7 :

Soit un ressort à spires non jointives de constante de raideur k = 32 N/m et de longueur à vide l_0 = 18 cm. On fixe à l'extrémité inférieure de ce ressort un solide supposé ponctuel de masse m = 200 g. L'ensemble coulisse sur une tige (T) soudée en O sur l'axe de rotation Δ vertical. On fait tourner uniformément le système autour de Δ. La tige fait alors un angle α = 30° par rapport à la verticale.



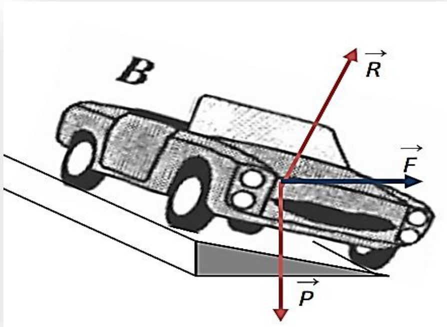
a. Faire le bilan des forces appliquées au solide S et les représenter. On négligera la résistance de l'air ainsi que les frottements sur la tige.

b. Calculer la tension T du ressort si l'intensité de la réaction vaut R = 0,268 N.

c. Calculer les vitesses angulaire ω et linéaire v du solide S.

d. Calculer l'accélération linéaire a du solide.

1. Relèvement des virages :



Considérons une voiture de masse m qui effectue un virage à la vitesse constante sur une route horizontale. Lorsque la voiture effectue le virage le mouvement est circulaire uniforme.

Système : voiture

Référentiel : terrestre supposé galiléen

B.F.A : $\vec{P}$; $\vec{R}$

T.C.I : $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F} = m\frac{v^2}{r}\vec{n}$

$\vec{F}$: est situé dans un plan horizontal et dirigé vers le centre de la trajectoire, elle est centripète.

$\vec{R}$: est nécessairement incliné d'un angle α par rapport à la verticale. Pour cela on doit relever la route en inclinant les parties courbes de la route de l'extérieur vers intérieur.