P_2 : LES BASES DE LA DYNAMIQUE

I. Mouvement du centre d'inertie :

Le centre d'inertie d'un système matériel est le barycentre des points du système affecté de leur masse respective. Il est donné par la relation barycentrique.

Soit S un solide de masse M constitué des points matériels A_1, A_2,……, Ai de masses respectives m_1, m_2,……, m_i. Si G est le centre d'inertie du solide, la relation barycentrique donne :

$$m_1\overrightarrow{GA_1} + m_2\overrightarrow{GA_2} + \cdots + m_i\overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$$

Soit un point O quelconque de l'espace :

$$m_1(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_1}) + m_2(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_2}) + \cdots + m_i(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GO}(m_1 + m_2 + \cdots + m_i) + m_1\overrightarrow{OA_1} + \cdots + m_i\overrightarrow{OA_i} = \vec{0} \Rightarrow \sum_i m_i\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OA_i} \Rightarrow$$

$$M\overrightarrow{OG} = \sum_i m_i\overrightarrow{OA_i}$$

Exemple : Une tige AB homogène et de section constante a pour longueur 2l = 72 cm et pour masse m. On place en A une masselotte de masse $m_1 = 2m$ et en B une autre de masse $m_2 = 3m$. Déterminer la position du centre d'inertie G du solide ainsi constitué.

II. Quantité de mouvement :

1. Quantité de mouvement :

Soit un point matériel A de masse m_i animé d'une vitesse $\vec{v_i}$. La quantité de mouvement du point A, notée $\vec{p_i}$ est donnée par la relation $\vec{p_i} = m\vec{v_i}$. Elle s'exprime en kg.m/s.

2. Quantité de mouvement d'un solide :

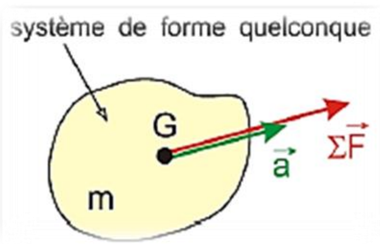
Un solide de masse m peut être décomposé en plusieurs points matériels A_i de masse m_i et de vecteur-vitesse $\vec{v_i}$.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i\vec{v_i} = \sum_i m_i \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OA_i}) = \frac{d}{dt}\sum_i m_i\overrightarrow{OA_i} = \frac{d}{dt}M\overrightarrow{OG} = M\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \Rightarrow \vec{p} = M.\vec{v}_G$$

$\vec{v}_G$: la vitesse du centre d'inertie du solide

III. Relation fondamentale de la dynamique :

1. Enoncé :



Dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un système est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur-quantité de mouvement : $\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

2. Les lois de Newton :

2.1. Théorème du centre d'inertie (2ème loi de Newton) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m.\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a}$$

Dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un système est égale au produit de la masse et du vecteur-accélération.

2.2. Principe d'inertie (1ère loi de Newton) :

Si $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$ alors $\begin{cases} \vec{v} = \overrightarrow{cte} \Rightarrow \text{MRU} \\ \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \text{immobilé} \end{cases}$

Dans un référentiel galiléen, si un solide n'est soumis à aucune force, ou s'il est soumis à un ensemble de forces dont la résultante est nulle, alors le solide décrit un mouvement rectiligne uniforme ou est immobile.

2.3. Principe des actions réciproques (3ème loi de Newton) :

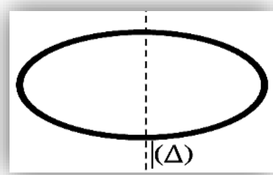
Si un corps A exercice une force $\overrightarrow{F_{A/B}}$ sur un corps B, alors le corps B exerce également une force $\overrightarrow{F_{B/A}}$ sur le corps tel que : $\overrightarrow{F_{A/B}} = -\overrightarrow{F_{B/A}}$ ou $F_{A/B} = F_{B/A}$.

2.4. Théorème de l'accélération angulaire :

Dans un référentiel galiléen, lorsqu'un solide de moment d'inertie J_Δ est en rotation autour d'un axe fixe Δ, le moment par rapport à cet axe de la résultante des forces appliquées au solide es tel que : $\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta . w^2$

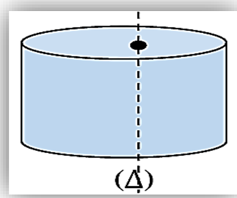
Rappel sur les expressions des moments d'inerties de quelques solides :

NB : Dans les exemples ci-dessous l'axe de rotation passe par le centre de gravité du solide



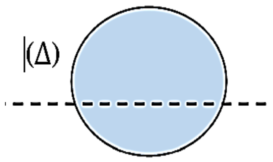
- Cerceau ou circonférence pesante de masse M tournant autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à son plan et passant par son centre O.

$$J_\Delta = MR^2$$



- Cylindre plein homogène (ou disque homogène) de masse M, de rayon R tournant autour de son axe de révolution :

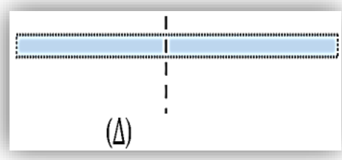
$$J_\Delta = \frac{1}{2}MR^2$$



- Sphère pleine homogène de masse M, de rayon R, tournant autour d'un axe confondu avec un diamètre :

$$J_\Delta = \frac{2}{5}MR^2$$

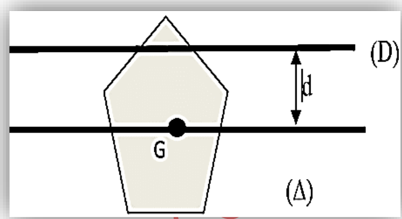
- Tige homogène de masse M, de longueur l tournant autour d'un axe (Δ) perpendiculaire à la tige en son milieu :



$$J_\Delta = \frac{1}{12}M\ell^2$$

- Théorème de Huygens :

Le moment d'inertie d'un solide de masse M par rapport à un axe (D) est égal à son moment d'inertie par rapport à un axe (Δ) parallèle à (D) et passant par son centre de gravité augmenté du produit Md^2, d est la distance entre les deux axes : $J_{(D)} = J_\Delta + Md^2$



IV. Théorème relative aux énergies :

1. Energie cinétique :

La variation d'énergie cinétique d'un solide entre deux instants est égale au travail des forces appliquées à ce solide entre ces deux instants.

Nature du mouvement	Translation	Rotation
Expression de l'énergie cinétique	$E_C = \frac{1}{2}mv^2$	$E_C = \frac{1}{2}mw^2$
Expression du travail	$W(\vec{F}) = \vec{F}.AB$	$W(\vec{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}).\theta$
Théorème de l'énergie cinétique	$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \sum W(\vec{F})$	$\frac{1}{2}mw_f^2 - \frac{1}{2}mw_i^2 = \sum W(\vec{F})$

2. Energie potentielle :

Pesanteur	Elastique	Torsion
$\mathbf{E_{PP} = mgh + C}$	$E_{Pe} = \frac{1}{2}kx^2 + C$	$E_{Pc} = \frac{1}{2}C\alpha^2 + C_1$
$\mathbf{\Delta E_P = -W(\vec{F})}$; $\vec{\mathbf{F}}$ étant l'ensemble des forces conservatives		

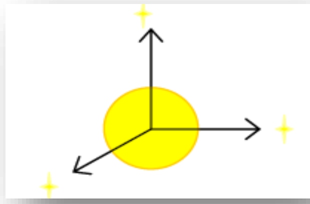
3. Energie mécanique :

Expression	$E_m = E_C + E_P$ avec $E_P = E_{PP} + E_{Pe} + E_{Pc}$
Loi de conservation	$\Delta E_m = 0$
Loi de non conservation	$\Delta E = W(\vec{f})$; $\vec{f}$ étant l'ensemble des forces non conservatives

V. **Référentiels et repères galiléens :**

Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel les lois de Newton sont applicables.

1. Référentiel de Copernic (Héliocentrique) :



Il est constitué du centre du soleil comme origine et de trois directions fixes allant du centre du soleil vers trois étoiles lointaines (elles sont si loin que l'on peut considérer leur position fixe).

On utilise ce référentiel pour décrire le mouvement des planètes autour du Soleil. Dans ce référentiel la Terre décrit son orbite en 365,25 jours.

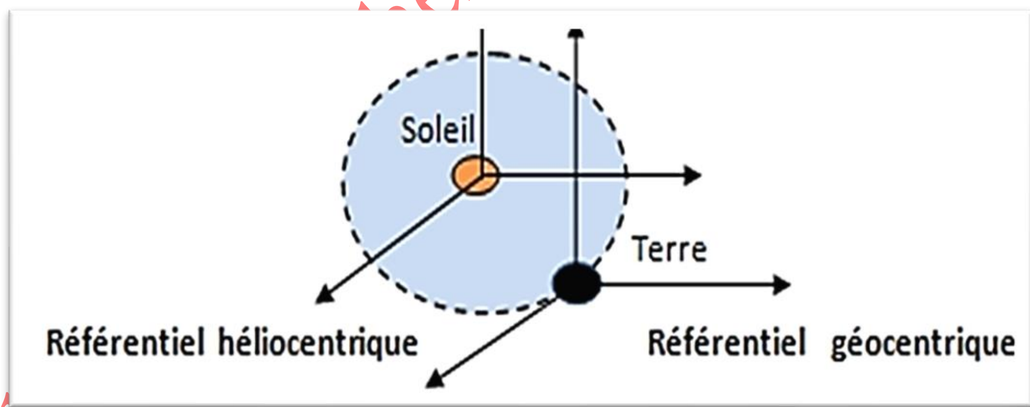
2. Référentiel géocentrique :

Il est constitué du centre du Terre comme origine et de trois axes dirigés vers les trois étoiles fixes du repère de Copernic.

On utilise ce référentiel pour décrire les mouvements des satellites artificiels ou naturels. Ce référentiel est galiléen. On pourrait définir le même référentiel pour n'importe quelle autre planète. Dans ce référentiel la Terre tourne autour d'elle-même en un jour sidéral (23h 56 min 04s) suivant l'axe des pôles.

3. Référentiel terrestre :

Un repère du référentiel terrestre ou du laboratoire est lié à la Terre. Si les mesures ne demandent pas une très grande précision et si leur durée est très courte on peut considérer ce référentiel comme galiléen.



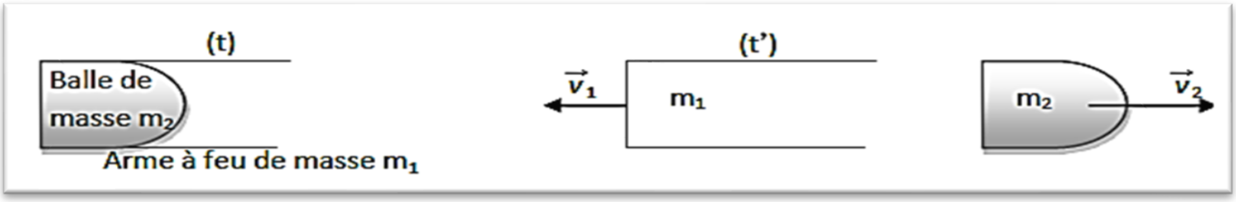
VI. Conservation de la quantité de matière :

Relation fondamentale de la dynamique $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

Si $\sum \vec{F} = \vec{0}$, alors $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \overrightarrow{cte}$. Ainsi le système est isolé ($\vec{v} = \vec{0}$) ou système est pseudo-isolé ($\vec{v} = \overrightarrow{cte}$)

1. Application au recul d'une arme à feu :

Considérons le système formé par une arme à feu et un projectile.



Avant le tir	Après le tir
$\overrightarrow{\mathbf{p_1}} = (\mathbf{m_1} + \mathbf{m_2}).\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$ **car** $\vec{\mathbf{v}}_0 = \vec{\mathbf{0}}$	$\overrightarrow{p_2} = m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2$

Conservation de la quantité de mouvement : $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 \Rightarrow \vec{0} = m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2$

Suivant un axe x orienté dans le sens du mouvement : $0 = m_1(-v_1) + m_2.v_2 \Rightarrow m_1.v_1 = m_2.v_2$

$$v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1}$$

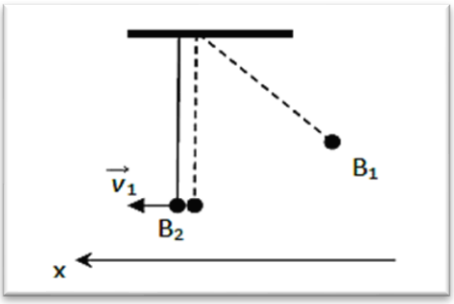
2. Etudes des chocs :

Il y a choc entre systèmes lorsque leurs vitesses sont brusquement modifiées pat contact pendant une faible durée.

2.1. Choc élastique : Un choc est élastique si après le choc les corps considérés ne subissent aucune déformation. A l'issue d'un choc élastique il y a conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique.

Exemple :

Considérons le choc entre deux boules B_1 et B_2 de deux pendules simples de même longueur et très proches. On écarte la boule B_1 d'un angle θ et on la libère sans vitesse initiale. A l'instant du choc avec B_2 sa vitesse $\vec{v_1}$ est horizontale. Déterminer en fonction de v1 les vitesses après choc.



	Quantité de mouvement		Energie cinétique	
Boules	B_1	B_2	B_1	B_2
Avant le choc	$m_1\vec{v}_1$	$\vec{0}$	$\frac{1}{2}m_1v_1^2$	0
Après le choc	$m_1\vec{v'}_1$	$m_2\vec{v'}_2$	$\frac{1}{2}m_1v'^2_1$	$\frac{1}{2}m_2v'^2_2$

Conservation de la quantité de mouvement : $m_1\vec{v}_1 = m_1\vec{v'}_1 + m_2\vec{v'}_2$

Suivant un axe x orienté dans le sens du mouvement : $m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \Rightarrow m_1(v_1 - v'_1) = m_2v'_2$ (1)

Conservation de l'énergie cinétique :

$\frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 \Rightarrow m_1v_1^2 = m_1v'^2_1 + m_2v'^2_2 \Rightarrow m_1(v_1^2 - v'^2_1) = m_2v'^2_2$ (2)

$\frac{(2)}{(1)} = \frac{m_1(v_1^2 - v'^2_1)}{m_1(v_1 - v'_1)} = \frac{m_2 v'^2_2}{m_2 v'_2} \Rightarrow \frac{(v_1 - v'_1)(v_1 + v'_1)}{v_1 - v'_1} = \frac{v'^2_2}{v'_2} \Rightarrow v_1 + v'_1 = v'_2$ (3)

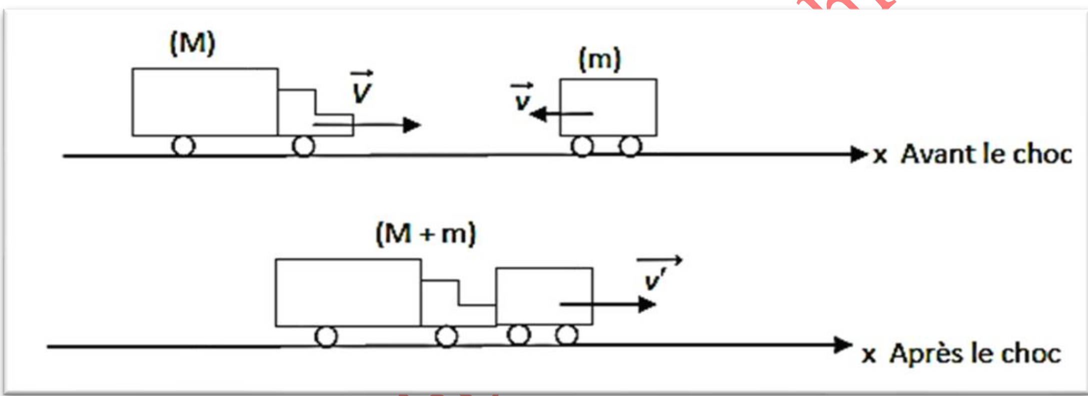
(3) dans (1) : $m_1(v_1 - v'_1) = m_2(v_1 + v'_1) \Rightarrow (m_1 - m_2)v_1 = (m_1 + m_2)v'_1$

$\Rightarrow v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}$ (4). En fin (4) dans (3) donne : $v'_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$

2.2. Choc mou : C'est un choc à l'issu duquel les corps considérés sont déformés. Il y a conservation de la quantité de mouvement et non conservation de l'énergie cinétique.

Exemple :

Une locomotive de masse M = 50 t se déplace sur une ligne rectiligne horizontale avec une vitesse V = 72 Km/h. En sens contraire vient un wagon de masse m = 1 t avec une vitesse v = 30 km/h. La locomotive heurte le wagon et continue à rouler en poussant se dernier. Quelle est leur vitesse commune ?



$$M\vec{V} + m\vec{v} = (M + m)\vec{v'}$$

Suivant l'axe x : $MV - mv = (m + M)v' \Rightarrow v' = \frac{MV - mv}{M + m}$