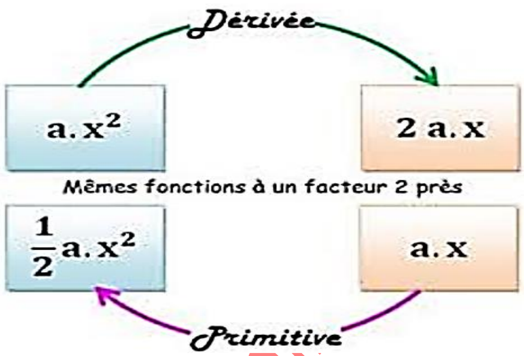
C_0 : OUTILS MATHEMATIQUES

Certaines notions mathématiques sont requises pour aborder le programme de physique-chimie de terminale sereinement. Le but de ce chapitre introductif est de définir une partie de ces outils utiles pour de nombreux chapitres.

1. Primitives :

1.1. Primitive d'une fonction :

Soit une fonction mathématique f définir sur un intervalle réel I. Calculer une primitive de cette fonction revient à faire l'opération inverse de la dérivée. Si l'on note f' la dérivée de f, alors f est une primitive de f'.



On dit que F est une primitive de f sur un intervalle I si et seulement si F est dérivable sur I et que pour tout $x \in I$: $F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$.

Les primitives d'une fonction sont toutes définies à une constante près. Puisque la dérivée d'une constante K est nulle, alors si F est une primitive de f, F + K est aussi une primitive. La constante K est appelée constante d'intégration.

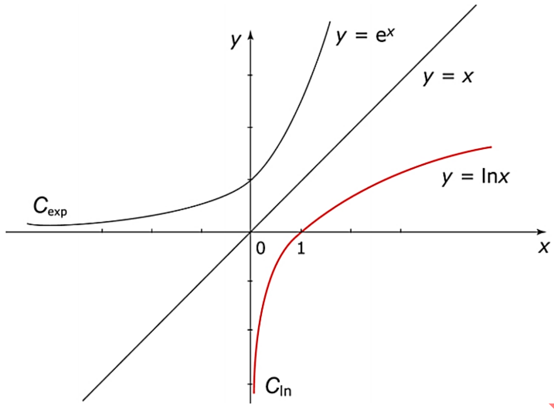
1.2. Primitives usuelles :

Fonction	Primitive	Intervalle
$f(x) = a$	$F(x) = ax$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln x$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} \quad n \neq 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

2. Fonctions logarithmes népérien et décimal :

2.1. Fonction logarithme népérien :

On appelle fonction logarithme népérien, notée ln, la bijection réciproque de la fonction exponentielle sur]0 ; +∞[, telle que pour tout x ∈]0 ; +∞[: $e^{\ln x} = \ln(e^x) = x$



2.2. Fonction logarithme décimal :

Par analogie avec le logarithme népérien, on définit la fonction logarithme décimal, notée log, comme la bijection réciproque de la fonction « 10 puissance » sur l'intervalle]0 ; +∞[par : $10^{\log(x)} = \log(10^x) = x$.

Exemple : Le chapitre 5 propose une première application de cette fonction dans le cadre de la définition du pH d'une solution : $pH = -\log[H_3O^+] \Rightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH}$

2.3. Formules avec le logarithme :

Que ce soit pour le logarithme népérien ou décimal, il existe quelques formules utiles :

$\ln(a\times b) = \ln(a) + \ln(b)$

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\ln(a^n) = n\ln(a)$

$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

3. Équation différentielle linéaire du premier ordre :

3.1. Définitions :

- Une équation différentielle est une équation reliant une fonction f et ses dérivées successives : $\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \ldots\ldots, \frac{d^nf(x)}{dx^n}$.
- Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation reliant une fonction f et sa dérivée première $\frac{df(x)}{dx}$, et que l'on peut écrire sous la forme : $\frac{df(x)}{dx} + a(x)f(x) = b(x)$

Où a(x) et b(x) sont deux fonctions.

- On appelle équation homogène associée l'équation différentielle pour laquelle le second membre (terme b(x) à droite de l'équation) est nul : $\frac{df(x)}{dx} + a(x)f(x) = 0$

Remarques :

- Dans le cadre du programme de terminale de physique-chimie, on se contentera d'étudier les équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants, c'est-à-dire avec $a(x) = a$ et $b(x) = b$ ($a, b \in R$).
- La variable, notée x ici peut désigner n'importe quelle grandeur physique. On verra que les équations étudiées en terminale en physique-chimie se rapportent essentiellement à la variable temporelle t. L'équation différentielle s'écrira alors : $\frac{df(t)}{dt} + af(t) = b$
- La constante a s'exprime alors en s^{-1} : elle est liée à un temps caractéristique τ tel que $a = \frac{1}{\tau}$.

3.2. Solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants :

Soit une équation différentielle de la forme : $\frac{df(t)}{dt} + af(t) = b$. La solution de cette équation est la somme de la solution à l'équation homogène associée, et d'une solution particulière.

Solution à l'équation homogène : $h(t) = \lambda e^{-at}$, $\lambda \in R$ Solution particulière : $f_0(t) = \frac{b}{a}$

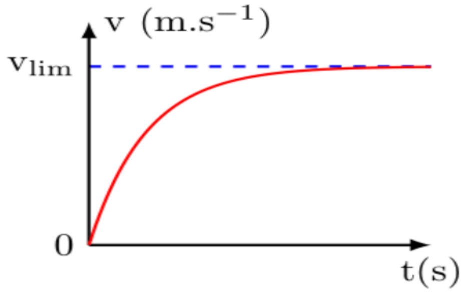
D'où la solution générale : $f(t) = h(t) + f_0(t) = \lambda e^{-at} + \frac{b}{a}$

La constante λ dépend des conditions initiales : par exemple, savoir que $f(2) = 3$ permet de trouver la valeur de λ.

Exemples au programme :

- Radioactivité : loi de décroissance exponentielle
- Mécanique : chute dans un fluide visqueux
- Électricité : circuit (R, L) ; (R, C) ; (L, C) et (R, L, C).

3.3. Allure de la solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants :



Courbe représentant l'évolution de la vitesse en fonction du temps dans le cas d'un objet en chute avec frottements visqueux. La fonction v(t) est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants. Cette équation est obtenue à partir de la seconde loi de Newton.

4. Produit vectoriel :

4.1. Produit vectoriel de deux vecteurs :

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

4.1.1. Caractéristique de $\vec{w}$:

- Direction $\perp$ au plan $(\vec{u}, \vec{v})$
- Sens donne par l'une des règles
- Intensité : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\vec{u}, \vec{v})$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ forment un trièdre direct. Le sens du vecteur $\vec{w}$ est donne par l'une des règles suivantes :

- Règle de la main droite :
  - La main droite suivant $\vec{u}$
  - La paume tournée vers $\vec{v}$
  - Le pousse indique le sens de $\vec{w}$
- Règle des 3 doigts de la main droite :
  - Le pouce suivant $\vec{u}$
  - L'index suivant $\vec{v}$
  - Le majeur indique le sens de $\vec{w}$

4.1.2. Quelques propriétés du produit vectoriel :

P1 : $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$

P2 : $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} \,/\!/\, \vec{v}$

P3 : dans un trièdre direct, chaque vecteur est égal au produit vectoriel des deux autres.

Exemple : pour la base orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on a :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$$
$$\vec{j} \wedge \vec{i} = \vec{i}$$
$$\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$