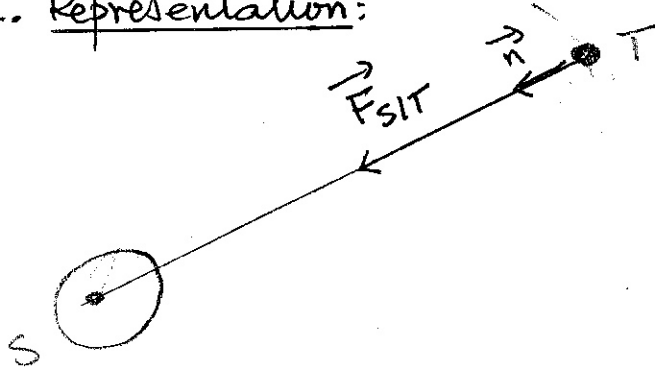


Correction des exercices sur la gravitation

Exercice 6:

1. Représentation:



2. Mq le mot de la Terre est circulaire uniforme:

Dans un référentiel héliocentrique la Terre est soumise à la force gravitationnelle exercée par le Soleil:

$$\vec{F}_{S/T} = \frac{G \cdot M_T \cdot M_S}{r^2} \cdot \vec{n}$$

D'après la 2^{ème} loi de Newton:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M_T \cdot \vec{a}$$

$$\hookrightarrow \vec{F}_{S/T} = M_T \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow \frac{G \cdot M_T \cdot M_S}{r^2} \cdot \vec{n} = M_T \cdot \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{G M_S}{r^2} \cdot \vec{n}$$

Dans la base de Frenet:

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n} + \frac{dv}{dt} \cdot \vec{t}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{v^2}{r} = \frac{G M_S}{r^2} \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$, donc le mot de la Terre est CU.

3. Expression de v:

$$\frac{v^2}{r} = \frac{G M_S}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_S}{r}}$$

Expression de T:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G M_S}{r}}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{\frac{G M_S}{r}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G M_S}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_S}}$$

4. Troisième loi de Kepler:

$$\text{On a: } T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G M_S}$$

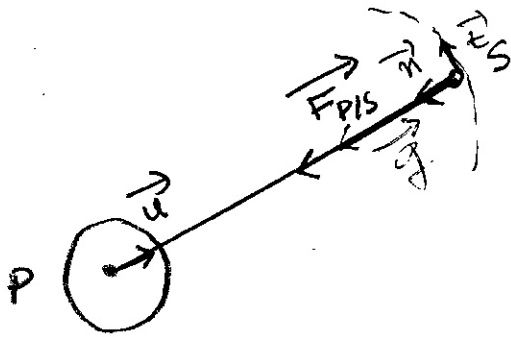
$$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G M_S} = \text{constante}$$

Donc la 3^{ème} loi de Kepler est bien vérifiée.

Exercice 8:

1. Caractéristique de $\vec{F}_{P/S}$:

- * Point d'appliqué: centre de S
- * Sens: centripète
- * direction: radiale (PS)
- * norme: $F_{P/S} = \frac{K m M}{r^2}$ (1)



2. Expression de $\vec{g}$:

$$\vec{F}_{P/S} = - \frac{K m M}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\Rightarrow \frac{\vec{F}_{P/S}}{m} = - \frac{K M}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{g} = - \frac{K M}{r^2} \cdot \vec{u}}$$

3. Nature du mouvement:

Système: Satellite

Ref: Astrocyclique SG

BFA: $\vec{F}_{P/S} = - \frac{G m M}{r^2} \cdot \vec{u}$

D'après la 2^{ème} loi de Newton:

$$\vec{F}_{P/S} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow - \frac{K m M}{r^2} \cdot \vec{u} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = - \frac{K M}{r^2} \cdot \vec{u}$$

Dans la base de Frenet: $\vec{u} = -\vec{n}$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{K M}{r^2} \vec{n} \Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{K M}{r^2} \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases}$$

$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte.}$ Donc S a un mouvement CU.

4. Expression de v :

$$a_n = \frac{K M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{K M}{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{K M}{r}}}$$

Expression de T :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{K M}{r}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{K M}}}$$

M et $\frac{T^2}{r^3}$ est constant:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{K M}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{K M}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{K M} = \text{constante}$$

5. Masse de la Planète

$$\boxed{M = \frac{4\pi^2 r^3}{K \cdot T^2}}$$

$$M = \frac{4\pi^2 \times (185500 \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times (22,6 \times 3600)^2}$$

$$\boxed{M = 5,71 \cdot 10^{26} \text{ Kg}}$$

6. Déterminons le rayon r'

D'après la 3^{ème} loi de Kepler

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{T'^2}{r'^3}$$

$$\hookrightarrow r'^3 = \frac{T'^2 \times r^3}{T^2}$$

$$r' = r \sqrt[3]{\left(\frac{T'}{T}\right)^2}$$

$$\text{AN: } \boxed{r' = 5,28 \cdot 10^5 \text{ Kg}} \quad (2)$$

Exercice 9 :

1. Expression de la force gravitation :

$$F = \frac{G \cdot m \cdot m'}{d^2}$$

2. Masses du soleil :

$$F = \frac{G \cdot M_T \cdot M_S}{d^2}$$

$$\Rightarrow M_S = \frac{F \cdot d^2}{G \cdot M_T}$$

$$AN: M_S = \frac{3,5 \cdot 10^{22} \times (1,5 \cdot 10^{11})^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}$$

$$M_S = 1,97 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

3.1. le référentiel est géocentrique

3.2 Expression de v :

$$TCI: \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \frac{G M_T m}{(R_T + h)^2} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} \cdot \vec{n}$$

$$\hookrightarrow a = a_n (\Rightarrow) \frac{G M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{v^2}{R_T + h}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}$$

$$AN: v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{(6400 + 400) \cdot 10^3}}$$

$$v = 7672 \text{ m/s}$$

3.3. Expression de T :

$$T = \frac{2\pi (R_T + h)}{v} = \frac{2\pi (R_T + h)}{\sqrt{\frac{G M_T}{R_T + h}}}$$

$$\hookrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G M_T}}$$

$$AN: T = 2\pi \sqrt{\frac{((6400 + 400) \cdot 10^3)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}}$$

$$T = 5569 \text{ s} = 1,55 \text{ minutes}$$

Expression de w :

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G M_T}}}$$

$$\Rightarrow w = \sqrt{\frac{G M_T}{(R_T + h)^3}}$$

$$w = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{((6400 + 400) \cdot 10^3)^3}}$$

$$w = 1,128 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}$$

H. La période d'un satellite géostationnaire est égale 86400 s = 24 h car il a la même période que la Terre. Effet un satellite géostationnaire est fixe p/r à Terre et tourne à la même vitesse angulaire que la Terre. (3)

5. Altitude de h:

D'après la 3^{ème} loi de Kepler:

$$\frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$\Rightarrow (R_T + h)^3 = \frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2} - R_T^3}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24} \times (86400)^2}{4\pi^2} - 6400 \cdot 10^3}$$

$$h = 36.000 \text{ km}$$

Exercice 10:

1.1. Caractéristiques de $\vec{F}$:

* point d'app: centre de l'objet

* sens: centripète

* direction: radiale

* norme: $F = \frac{KM}{r^2}$

1.2. Caractéristiques de $\vec{G}$:

* point d'app: centre de l'objet

* sens: centripète

* direction: radiale

* norme: $G = \frac{KM}{r^2}$

1.3. Expression de G_0 :

On a: $r = R + h$

$$\hookrightarrow G_h = \frac{KM}{(R+h)^2}$$

Au sol $h = 0 \Rightarrow$

$$G_0 = \frac{KM}{R^2}$$

1.4. Calculons G_0 :

$$G_0 = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{(6400 \cdot 10^3)^2} = 9,8 \text{ m/s}^2$$

$$G_0 = 9,8 \text{ m/s}^2$$

2.1. Mg le mvmt est CU:

$$\text{TCI: } \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \frac{KM}{r^2} \cdot \vec{n} = m \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{KM}{r^2} \cdot \vec{n} \Rightarrow a = a_n$$

$$\hookrightarrow a_t = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0$$

Donc $v = \text{cte} \Rightarrow \text{MCU}$

2.2. Expression de T:

$$a_n = a \Rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{KM}{r^2}$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{KM}{r}}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{KM}{r}}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{KM}}$$

$$\text{Mg } \frac{T^2}{r^3} = \text{constante:}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{KM} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM}$$

$$\text{Comme } \frac{4\pi^2}{KM} = \text{cte} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3} = \text{cte}$$

2.3. Calculons T pour $h = 300 \text{ km}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{KM}}$$

$$\text{AN: } T = 2\pi \sqrt{\frac{[(6400 + 300) \cdot 10^3]^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}}$$

$$T = 5447 \text{ s}$$

3.1 On choisit la référence de l'énergie potentielle à l'infini.

3.2. Expression de E_m :

$$E_m = E_c + E_p$$

$$= \frac{1}{2} m v^2 - \frac{K m M}{r}$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot \frac{K M}{r} - \frac{K m M}{r}$$

$$\Rightarrow E_m = - \frac{K m M}{2r}$$

3.3. L'énergie mécanique diminue car les forces de frottement dissipent de l'énergie.

Exercice 13:

1. Caractéristiques de $\vec{F}_g$:

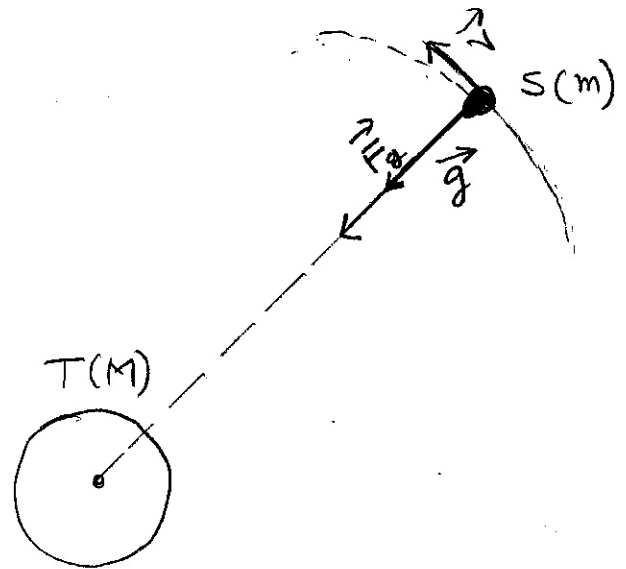
- * sens: centripète
- * direct^o: radiale
- * Norme: $F_g = \frac{K m M}{r^2}$

2. Expression de $\vec{g}$:

$$\vec{F}_g = - \frac{K m M}{r^2} \cdot \vec{u} \Rightarrow$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}_g}{m} = - \frac{K M}{r^2} \cdot \vec{u}$$

$$\hookrightarrow \vec{g} = - \frac{K M}{r^2} \cdot \vec{u}$$



3. Hq le mot est uniforme:

$$P(\vec{F}_g) = \vec{F} \cdot \vec{v} \text{ or } \vec{F} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\hookrightarrow P(\vec{F}_g) = 0 \Rightarrow W(\vec{F}_g) = 0$$

$\Delta E_c = W(\vec{F}_g) = 0 \Rightarrow E_c = \text{cte}$
 $\Rightarrow v = \text{cte}$ - Donc le mot de S est circulaire et uniforme.

4. Expression de v :

$$a = a_n \Rightarrow \frac{K M_T}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{K M_T}{r} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{K M_T}{r}}$$

$$\text{AN: } v = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.97 \cdot 10^{24}}{(20.000 \cdot 10^3)^2}}$$

$$v = 4462 \text{ m/s}$$

5. Expression de T_s :

$$T_s = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{K M_T}{r}}}$$

$$\Rightarrow T_s = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{K M_T}}$$

$$\text{AN: } T_s = \sqrt{\frac{4\pi^2 \times (20.000 \cdot 10^3)^3}{6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.97 \cdot 10^{24}}}$$

$$T_s = 28163 \text{ s}$$

6. Calculons Δt :

Supposons qu'à l'instant $t=0$;
le satellite S soit à la verticale
d'un point M de la Terre.

A l'instant t ; le satellite a
tourné de α_S et la Terre d'un
angle α_T :

$$\alpha_S = \omega_S t \text{ et } \alpha_T = \omega_T t$$

A l'instant $t = Z$ ou il repasse
par la verticale de point M on a:

$$\alpha_S = \omega_S \cdot Z \text{ et } \alpha_T = \omega_T \cdot Z$$

α_S et α_T sont reliés par:

$$\alpha_S = \alpha_T + 2\pi$$

$$\Rightarrow \omega_S \cdot Z = \omega_T \cdot Z + 2\pi \text{ avec } Z = \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta t(\omega_S - \omega_T) = 2\pi$$

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_S - \omega_T}$$

$$\text{avec: } \omega_S = \frac{2\pi}{T_S} \text{ et } \omega_T = \frac{2\pi}{T_T}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta t &= \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_S} - \frac{2\pi}{T_T}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{T_S} - \frac{1}{T_T}} \end{aligned}$$

$$\Delta t = \frac{T_S \times T_T}{T_T - T_S}$$

$$\Delta t = \frac{28163 \times 86164}{86164 - 28163}$$

$$\Delta t = 41838 \text{ s} = 11 \text{ h } 37 \text{ minutes}$$

7. Calculons r' :

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM_T} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot K \cdot M_T}{4\pi^2}}$$

$$\text{AN: } r' = \sqrt[3]{\frac{(86164)^2 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 5,97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2}}$$

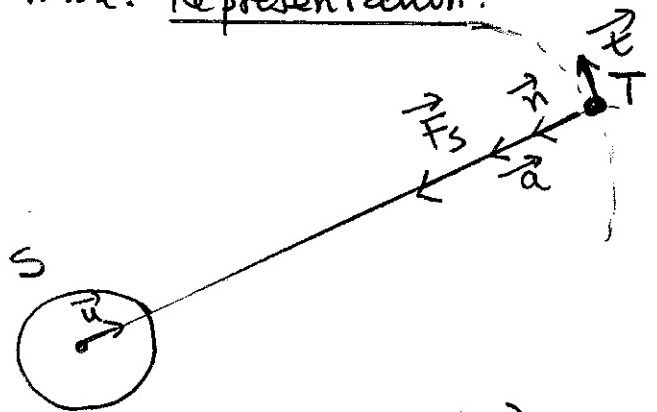
$$r' = 4,2 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Exercice 18:

1.1.1. Titan est soumis à la
force exercée par saturne:

$$\vec{F}_{S/T}$$

1.1.2. Représentation:



1.1.3. Expression de $\vec{F}_{S/T}$

$$\vec{F}_{S/T} = -\frac{G \cdot M_S \cdot M_T \cdot \vec{u}}{R_T^2}$$

1.2.1. Expression de $\vec{a}$

$$\begin{aligned} \text{TCI: } \vec{F}_{S/T} &= M_T \cdot \vec{a} \Rightarrow \\ -\frac{G \cdot M_S \cdot M_T}{R_T^2} &= M_T \cdot \vec{a} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = -\frac{GM_S}{R_T^2} \cdot \vec{u}$$

1.2.2. Dans la base de Frenet $\vec{u} = -\vec{n}$

$$\hookrightarrow \vec{a} = \frac{GM_S}{R_T^2} \cdot \vec{n}$$

Donc l'accélération se réduit à
sa composante normale.

1.2.3. Mq le mot de Titan est uniforme:

$$\vec{a} = \frac{GM_S}{R_T^2} \cdot \vec{n} \Rightarrow \text{le mot est circulaire car } a = a_n$$

$$\Rightarrow GM \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cte}$$

Donc le mot est C.U.

1.2.4. Expression de v:

$$a = a_n \Rightarrow \frac{v^2}{R_T} = \frac{GM_S}{R_T^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T}}}$$

2.1. Troisième loi de Kepler:

$$T = \frac{2\pi R_T}{v} = \frac{2\pi R_T}{\sqrt{\frac{GM_S}{R_T}}}$$

$$\Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 R_T^3}{GM_S} \Rightarrow \frac{T^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$\text{Comme } \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{cte} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{R_T^3} = \text{cte}}$$

2.2. Calculons le rayon R_E

$$\frac{T_E^2}{R_E^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \Rightarrow R_E = \sqrt[3]{\frac{T_E^2 \cdot GM_S}{4\pi^2}}$$

$$R_E = \sqrt[3]{\frac{(1.37 \times 86400)^2 \times 6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.69 \cdot 10^{26}}{4\pi^2}}$$

$$\boxed{R_E = 2.38 \cdot 10^8 \text{ m.}}$$

3.1. Cassini est saturno-centrique si

$$\boxed{T_C = T_S}$$

3.2. Expression de h:

D'après la 3^{ème} loi de Kepler:

$$\frac{T_c^2}{R_c^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} \text{ avec } R_c = R_S + h$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_c^2}{(R_S + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$\hookrightarrow R_S + h = \sqrt[3]{\frac{T_c^2 \cdot GM_S}{4\pi^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{T_c^2 \cdot G \cdot M_S}{4\pi^2}} - R_S}$$

$$\text{AN: } h = \sqrt[3]{\frac{(10 \times 8600 + 39 \times 60)^2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.69 \cdot 10^{26}}{4\pi^2}} - 6.0 \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 5.54 \cdot 10^7 \text{ m.}}$$

Exercice 21:

1. Calculons v_p :

$$\boxed{v_p = \frac{2\pi R_p}{T_p}}$$

$$v_p = \frac{2\pi \times 9380 \cdot 10^3}{7 \times 8600 + 39 \times 60}$$

$$\boxed{v_p = 2140 \text{ m/s}}$$

2. Expression de $\vec{F}$:

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{GM_M \cdot M_p}{R_p^2} \cdot \vec{u}}$$

3. Première loi de Kepler:

Dans un référentiel marso-centrique, Phobos décrit une trajectoire elliptique dont le centre de Mars est l'un des foyers. (7)

La trajectoire de Phobos n'est pas en accord avec cette loi car elle est circulaire.

4. Mg Phobos décrit un mouvement circulaire uniforme autour de Mars:

$$\text{TCT: } \vec{F} = M_p \vec{a} \Rightarrow$$

$$- \frac{G \cdot M_M \cdot M_p}{R_p^2} = M_p \vec{a} \Rightarrow$$

$$\vec{a} = - \frac{G M_M}{R_p^2} \vec{u}$$

Dans la base de Frenet $\vec{u} = -\vec{n}$

$$\hookrightarrow \vec{a} = \frac{G M_M}{R_p^2} \cdot \vec{n}$$

$a = a_n \Rightarrow$ le movt est circulaire

$a_t = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = \text{cste}$,
le movt est uniforme.

Donc le movt de Phobos est circulaire uniforme.

Expression de v_p :

$$a_n = a \Rightarrow \frac{v_p^2}{R_p} = \frac{G M_M}{R_p^2}$$

$$\hookrightarrow \boxed{v_p = \sqrt{\frac{G M_M}{R_p}}}$$

5. Les foyers de Phobos sont placés au centre de Mars car sa trajectoire est circulaire.

6. Expression de T_p :

$$T_p = \frac{2\pi R_p}{v_p} = \frac{2\pi R_p}{\sqrt{\frac{G M_M}{R_p}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_p = 2\pi \sqrt{\frac{G M_M}{R_p^3}}}$$

Troisième loi de Kepler

$$T_p^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{G M_M}{R_p^3} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{T_p^2}{R_p^3} = \frac{4\pi^2}{G M_M} = \text{cste}}$$

7.1. Calculons r_A :

$$a = \frac{r_A + r_p}{2}$$

$$\hookrightarrow r_A + r_p = 2a$$

$$\Rightarrow \boxed{r_A = 2a - r_p}$$

$$r_A = 2 \times 15 - 8,3 = 21,7 M_m$$

$$\boxed{r_A = 21,7 M_m}$$

7.2. Calculons T_s :

D'après la 3^{ème} loi de Kepler

$$\frac{T^2}{R^3} = \text{cste} \Rightarrow \frac{T_p^2}{R_p^3} = \frac{T_s^2}{R_s^3}$$

$$\hookrightarrow T_s^2 = \frac{T_p^2 \times R_s^3}{R_p^3}$$

$$\Rightarrow \boxed{T_s = T_p \cdot \sqrt{\left(\frac{R_s}{R_p}\right)^3}}$$

$$\text{AN: } T_s = (7 \times 3600 + 39 \times 60) \sqrt{\left(\frac{9380 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^6}\right)^3}$$

$$\boxed{T_s = 13619 \text{ s} = 3 \text{ h } 47 \text{ min}}$$

}

NDONGO CHEM