Correction Interrogation N°2 PC TS2

Exercice 1: Le golfeur

1. Equation de la trajectoire: $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\beta}$. On remplace dans y(t) : $y(x) = -\dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\beta} \cdot x^2 + \tan\beta \cdot x$

2. Le point correspondant au trou de coordonnées (153 ; 0) doit résoudre l'équation de la trajectoire. Ainsi :

$$y_{TROU} = 0 = -\frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\beta} \cdot {x_{TROU}}^2 + \tan\beta \cdot x_{TROU} \Leftrightarrow -\frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\beta} \cdot x_{TROU} + \tan\beta = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{g \cdot x_{TROU}}{2\cos\beta \cdot \sin\beta}} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\frac{9{,}8 \times 153}{2 \times \cos 35 \times \sin 35}} = 40\ m/s$$

3. On sait que : $x_{TROU} = 153 = v_0 \cos\beta \cdot t_{TROU} \Leftrightarrow t_{TROU} = \dfrac{x_{TROU}}{v_0 \cos\beta} \Leftrightarrow t_{TROU} = \dfrac{153}{40 \times \cos 35} = 4{,}7\ s$

4. En dérivant les équations horaires de la position, on obtient : $\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\beta \\ v_y(t) = -gt + v_0 \sin\beta \end{cases}$

5. Lorsque la balle atteint la flèche F, la coordonnée verticale de la vitesse devient nulle. On a donc :

$$v_y(t_F) = -gt_F + v_0 \sin\beta = 0 \Leftrightarrow t_F = \frac{v_0 \sin\beta}{g}$$

Donc, l'ordonnée de la flèche est donc : $y(t_F) = -\dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{v_0 \sin\beta}{g}\right)^2 + v_0 \sin\beta \cdot \left(\dfrac{v_0 \sin\beta}{g}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad y(t_F) = \frac{{v_0}^2 \sin^2\beta}{2g} \Leftrightarrow \quad y(t_F) = \frac{40^2 \sin^2 35}{2 \times 9{,}8} = 27\ m$$

6. La vitesse de la balle en ce point est : $v = \sqrt{(v_0 \cos\beta)^2 + 0^2} = v_0 \cos\beta \Leftrightarrow v = 40 \times \cos 35 = 33\ m/s$

7. Calcul du poids de la balle : $P = mg = 0{,}0459 \times 9{,}8 = 0{,}45\ N$

Calcul de la poussée d'Archimède : $\Pi = m_{AIR} g = \rho_{AIR} \times V_{Balle} \times g \Leftrightarrow \Pi = \rho_{AIR} \times \dfrac{4\pi R^3 \cdot g}{3}$

$\Leftrightarrow \Pi = 1{,}3 \times \dfrac{4\pi \times (2{,}14 \cdot 10^{-2})^3 \times 9{,}8}{3} = 5{,}2 \cdot 10^{-4}\ N$. On calcule le rapport : $\dfrac{P}{\Pi} = \dfrac{0{,}45}{5{,}2 \cdot 10^{-4}} = 8{,}6 \cdot 10^2$

On remarque donc que la poussée d'Archimède exercée par l'air sur la balle est presque mille fois moindre que le poids de la balle. La poussée d'Archimède est donc négligeable devant le poids.

Exercice 2: Lois de Kepler

1.1. La première loi de Kepler dit que toutes les planètes du système solaire tournent sur une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers. Donc le Soleil doit se trouver en F_1 ou en F_2, ce qui est le cas ici.

1.2. D'après la deuxième loi de Kepler, on a alors : $A_1 = A_2$

1.3. Comme la distance entre M_1 et M_1' est nettement plus petite qu'entre M_2 et M_2' alors que la durée de ces trajets est la même, la vitesse de M_1 à M_1' est donc beaucoup plus faible que celle de M_2 à M_2'.

2.1. L'expression vectorielle de F est : $\vec{F} = -G \times \dfrac{m \cdot m_S}{r^2} \cdot \vec{u}$

2.2. D'après la deuxième loi de Newton : $\Sigma\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \quad \vec{F} = -G \times \dfrac{m \cdot m_S}{r^2} \cdot \vec{u} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = -G \times \dfrac{m_S}{r^2} \cdot \vec{u}$

2.3. On a la relation : $\vec{n} = -\vec{u}$

La nouvelle expression du vecteur-accélération est donc : $\vec{a} = -G \times \dfrac{m_S}{r^2} \times -\vec{n} \Leftrightarrow \vec{a} = G \times \dfrac{m_S}{r^2} \cdot \vec{n}$

2.4. On sait que : $\vec{a} = G \times \dfrac{m_S}{r^2} \cdot \vec{n}$

Or, comme l'accélération est donc normale (car dirigée selon $\vec{n}$), elle s'écrit aussi : $\vec{a} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n}$

On a donc l'égalité : $G \times \frac{m_S}{r^2} \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{r} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \frac{v^2}{r} = G \times \frac{m_S}{r^2} \Leftrightarrow \quad v = \sqrt{G \times \frac{m_S}{r}}$

2.5. Comme Uranus est plus éloignée du Soleil que Saturne, son rayon orbital r est donc plus grand.
Or, comme ce rayon est au dénominateur dans l'expression de la vitesse, cette dernière est donc plus petite pour Uranus que pour Jupiter.

2.6.1. D'après ce graphe on voit que la courbe moyenne est une droite passant par l'origine. Ainsi, l'équation liant T^2 à r^3 est une fonction du type : $T^2 = K.r^3$
Cette relation est précisément ce qui est dit dans la troisième loi de Kepler.

2.6.2. Il faut calculer la pente de la droite du graphe : $pente = \frac{12 \cdot 10^{16}\ s^2}{40 \cdot 10^{34}\ m^3} = 3{,}0 \cdot 10^{-19}\ s^2 \cdot m^{-3}$ cqfd.

2.6.3. Non, la Lune ne serait pas alignée avec les autres planètes sur ce graphe car seuls les corps qui tournent autour du Soleil possèdent la même valeur pour la constante de la 3e loi de Kepler. La lune, elle, tourne autour de la Terre.

2.6.4. Comme Rhea Sylvia orbite autour de Soleil, on a donc : $\frac{T_{RS}{}^2}{r_{RS}{}^3} = \frac{T_{RS}{}^2}{d^3} = 3{,}0 \cdot 10^{-19}\ S.I. \Leftrightarrow d = \sqrt[3]{\frac{T_{RS}{}^2}{3{,}0 \cdot 10^{-19}}}$

$\Leftrightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{(6{,}52 \times 365 \times 24 \times 3600)^2}{3{,}0 \cdot 10^{-19}}} = 5{,}2 \cdot 10^{11}\ m$ soit 520 millions de km environ.

3.1. T : période orbitale de Romulus
a : demi-grand axe de l'orbite de Romulus
G : constante de gravitation universelle
M : masse de Rhea Sylvia

3.2. Recherche de l'unité de G : $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Leftrightarrow G = \frac{4\pi^2 a^3}{MT^2}$. Ainsi : $[G] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2} = m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

3.3. D'après la troisième loi de Kepler, on peut écrire : $\frac{T_{Rom}{}^2}{a_{Rom}{}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{RS}}$ Donc : $M_{RS} = \frac{4\pi^2 a_{Rom}{}^3}{GT_{Rom}{}^2}$

$\Leftrightarrow \quad M_{RS} = \frac{4\pi^2 \times (1{,}360 \cdot 10^3)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \times (87{,}6 \times 3600)^2} = 1{,}50 \times 10^{19}\ kg$